Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Abril - Julio 2006

Nombre: ______________________________

Carnet: ________________ Sección: _____

MA-1123 DE HONOR—Segundo parcial—

Cada ejercicio vale 10 puntos. Justifique sus afirmaciones.
Debe resolver cuatro, cualesquiera de los cinco ejercicios.

1. Sea S una matriz antiautoadjunta $(S^* = -S)$.

   a) Demuestre que $I \pm S$ es inversible.

   b) Demuestre que $(I + S)(I - S)^{-1}$ es unitaria.

2. Sea f la transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ cuya matriz es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

   Demuestre que f no puede ser autoadjunta en **ningún** producto interno en $\mathbb{R}^3$.
   Sugerencia: Calcule algunas potencias de A.

3. Sea E el espacio vectorial de los polinomios $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ donde $a_0,\, a_1,\, a_2 \in \mathbb{R}$.
   Considere la fórmula

$$< p(x),\, q(x) >= \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx. \qquad (*)$$

   a) Demuestre que $(*)$ es un producto interno en E,

   b) Encuentre la proyección ortogonal del polinomio $p(x) = 1 + x^2$ sobre el espacio S donde

$$S \;=\; \left\{ q(x) \,/\, \int_0^1 q(x) \;=\; 0 \right\}$$

4. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

   a) Calcule el polinomio característico y el polinomio minimal de A.

   b) Encuentre el polinomio minimal de A

   c) ¿Es A diagonalizable?.

d) Encuentre una base $x_1,\, x_2,\, x_3$ de $\mathbb{R}^3$ en la que A se escriba en la forma $D+N$ donde D es diagonal y N es nilpotente y $DN = ND$.

5. Sea S el subespacio afin

$$S = \{\xi \,/\, \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 = 2\} \quad \text{de} \quad \mathbb{R}^3.$$

a) Encuentre una ecuación paramétrica para la recta R que pasa por el origen y es perpendicular a S. (Cada vector de la recta es perpendicular a cada vector paralelo a S).

b) Encuentre un punto P en S tal que

$$d(\mathbb{O}, P) \le d(\mathbb{O}, Q) \quad \text{para cada} \quad Q \in S$$